Kolokwium — Funkcje Analityczne

07.12.2023

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem**, **nazwiskiem**, **numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.
- Czas pisania: 180 minut.

Zadanie 1 (10 p.)

Obliczyć całkę

$$\int_{S(0,2)} \frac{e^z}{(z+3)^3 \sin^2(z+1)} dz,$$

gdzie $S(0,2)$ oznacza dodatnio zorientowany okrąg o środku w 0 i promieniu 2.

Podpowiedź: co możemy powiedzieć o zachowaniu funkcji $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ w otoczeniu punktu $z_0 = 0$?

Zadanie 2 (10 p.)

Niech $\Omega = \mathbb{C} \setminus \left(\overline{D}(1,1) \cup \overline{D}(-1,1)\right)$.

(a) (5 p.) Znajdź odwzorowanie konforemne, które przekształca obszar Ω na obszar

$$\Omega_1 = D(0,1) \setminus \{p\},$$

gdzie $p \in D(0,1)$ (punkt p proszę sobie wybrać samemu).

Podpowiedź: w tym punkcie będą potrzebne homografie oraz jedno odwzorowanie, które homografią nie jest. Można poszukać inspiracji w notatkach.

(b) (5 p.) Znajdź odwzorowanie konforemne, które przekształca obszar Ω na obszar

$$\Omega_2 = \{z \colon |z| < 1,\ \mathrm{Re}(z) > 0\} \setminus \{q\},$$

gdzie $q \in \{z \colon |z| < 1,\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ (tak jak w poprzednim punkcie, punkt q proszę wybrać samemu).

Zadanie 3 (10 p.)

Niech $D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$. Załóżmy, że zbiór $U \subseteq \mathbb{C}$ jest otwarty oraz $0 \in U$, a określona na nim funkcja $g \colon U \to D$ jest ciągła.

(a) (5 p.) Proszę udowodnić, że jeśli

$$\sin(g(z)) = z^{2023},$$

dla wszystkich $z \in U$, to funkcja g jest holomorficzna na U.

(b) (5 p.) Znajdź rozwinięcie funkcji g w szereg potęgowy w otoczeniu $z_0 = 0$.

Zadanie 4 (10 p.)

Udowodnić, że nie istnieje funkcja holomorficzna $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ taka, że

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty,$$

dla każdego $z_0 \in \mathbb{C}$ spełniającego $|z_0| = 1$.